Par exemple, il se trouve que beaucoup d'algorithmes de tri ont une complexité en temps de la forme $T(n) = A\,n\lg n + B\,n + O(\log n)$, où A et B sont des constantes qui dépendent de l'algorithme considéré. Si on arrête l'analyse au fait que $T(n) \sim A\,n\lg n$, on n'a qu'une information très partielle. De plus, choisir un algorithme en fonction de la valeur de la constante A s'avère être une mauvaise stratégie. En effet, les algorithmes pour lesquels A est petit sont souvent les même que ceux pour lesquels B est grand. Comme $n\lg n$ ne croît qu'un tout petit peu plus vite que n, l'algorithme le plus rapide rapide asymptotiquement parlant (celui pour lequel A est le plus petit) peut très bien ne l'être en fait que pour des valeurs de n tellement grandes qu'elles n'apparaissent jamais en pratique. C'est pourquoi il faut s'intéresser à la valeur de B pour faire le bon choix.

Avant d'aller plus loin dans notre étude du O, arrêtons-nous un peu pour parler d'un petit détail de style mathématique. Nous avons utilisé dans ce chapitre trois notations différentes pour le logarithmes : lg, ln et log. On utilise souvent "lg" dans des calculs liés à des méthodes informatiques, car c'est le logarithme à base 2 qui s'applique naturellement dans ces cas. En revanche, c'est "ln", le logarithme népérien (appelé aussi logarithme naturel) qui apparaît le plus souvent dans les calculs purement mathématiques, du fait qu'il est plus simple à manipuler. Que dire alors de "log" ? N'est-ce pas le vulgaire logarithme en base 10 qu'on apprend au lycée, celui qui est justement appelé "logarithme vulgaire" ? Eh bien si. D'ailleurs, beaucoup de mathématiciens brouillent les pistes en écrivant "log" pour le logarithme népérien ou le logarithme à base deux. En fait, il n'y a pas de convention universelle à ce sujet. Toutefois, cela n'a aucune importance lorsqu'un logarithme apparaît à l'intérieur d'une notation O, car les constantes multiplicatives ne comptent pas dans ce cas. Il n'y a donc aucune différence entre $O(\lg n)$, $O(\ln n)$ et $O(\log n)$ lorsque $n \to \infty$; il en est de même pour $O(\lg\lg n)$, $O(\ln\ln n)$ et $O(\log\log n)$. Chacun peut choisir celui qu'il préfère. En ce qui nous concerne, nous utiliserons "log", dans tous les cas où c'est possible sans ambiguïté, car il se prononce plus facilement.

Remarquez que $\log\log\log n$ *est indéfini si* $n \leqslant 10$.

9.3 MANIPULATION DE O

Comme tous les formalismes mathématiques, la notation O admet des règles de manipulation qui permettent de nous libérer des détails de sa définition. Une fois que ces règles sont établies et prouvées, on peut travailler à un niveau plus haut.

Par exemple, si on prouve une fois pour toutes les deux assertions

$$n^m = O(n^{m'}), \qquad \text{lorsque } m \leqslant m', \tag{9.21}$$

$$O\big(f(n)\big) + O\big(g(n)\big) = O\big(|f(n)| + |g(n)|\big), \tag{9.22}$$

alors on peut dire immédiatement que $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = O(n^3) + O(n^3) + O(n^3) = O(n^3)$, sans en passer par les calculs laborieux de la section précédente.

Voici quelques autres règles qui découlent de la définition :

$$f(n) = O\big(f(n)\big)\,; \tag{9.23}$$

$$c \cdot O\big(f(n)\big) = O\big(f(n)\big)\,, \qquad \text{si } c \text{ est constant}\,; \tag{9.24}$$

$$O\big(O(f(n))\big) = O\big(f(n)\big)\,; \tag{9.25}$$

$$O\big(f(n)\big)O\big(g(n)\big) = O\big(f(n)g(n)\big)\,; \tag{9.26}$$

$$O\big(f(n)\,g(n)\big) = f(n)O\big(g(n)\big)\,. \tag{9.27}$$

On démontre (9.22) dans l'exercice 9, et les preuves des autres formules sont similaires. Elles sont toutes indépendantes des conditions éventuelles sur la variable n.

(Note: la formule $O(f(n))^2$ ne désigne pas l'ensemble des fonctions $g(n)^2$ telles que $g(n)$ appartient à $O(f(n))$; ces fonctions $g(n)^2$ ne peuvent pas être strictement négatives, alors que l'ensemble $O(f(n))^2$ contient des fonctions strictement négatives. Si S est un ensemble, S^2 désigne l'ensemble de tous les produits $s_1 s_2$ tels que s_1 et s_2 appartiennent à S, et non l'ensemble des carrés s^2 tels que $s \in S$).

Nous pouvons déduire des équations (9.27) et (9.23) que $O\big(f(n)^2\big) = O\big(f(n)\big)^2$. Cette identité est parfois utile pour supprimer des parenthèses ; on peut ainsi écrire

$$O(\log n)^2 \qquad \text{au lieu de} \qquad O\big((\log n)^2\big)\,.$$

Ces expressions sont toutes deux préférables à "$O(\log^2 n)$", notation ambiguë car certains auteurs l'utilisent pour signifier "$O(\log\log n)$".

A-t-on aussi le droit d'écrire

$$O(\log n)^{-1} \qquad \text{au lieu de} \qquad O\big((\log n)^{-1}\big)\ ?$$

Non ! C'est interdit car l'ensemble de fonctions $1/O(\log n)$ ne contient pas l'ensemble $O(1/\log n)$, et n'en est pas un sous-ensemble non plus. Par contre, on peut remplacer $O\big((\log n)^{-1}\big)$ par $\Omega(\log n)^{-1}$, mais cela ne nous avance pas à grand chose. Nous imposerons donc aux exposants "à l'extérieur du O" d'être des entiers constants et strictement positifs.

Quelques unes des opérations les plus utiles nous sont fournies par les séries entières. Si la somme

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

converge absolument pour un certain nombre complexe $z = z_0$, alors

$$S(z) = O(1)\,, \qquad \text{pour tout } |z| \leqslant |z_0|.$$

C'est évident, parce que

$$|S(z)| \leqslant \sum_{n \geqslant 0} |a_n|\,|z|^n \leqslant \sum_{n \geqslant 0} |a_n|\,|z_0|^n = C < \infty\,.$$

En particulier, $S(z) = O(1)$ lorsque $z \to 0$ et $S(1/n) = O(1)$ lorsque $n \to \infty$, à la seule condition que $S(z)$ converge pour au moins une valeur non nulle de z. On peut appliquer ce principe pour tronquer une série à un endroit désiré et estimer le reste à l'aide d'un O. Par exemple, on a non seulement $S(z) = O(1)$, mais aussi

$$\begin{aligned} S(z) &= a_0 + O(z), \\ S(z) &= a_0 + a_1 z + O(z^2), \end{aligned}$$

et ainsi de suite, du fait que

$$S(z) = \sum_{0 \leqslant k < m} a_k z^k + z^m \sum_{n \geqslant m} a_n z^{n-m}$$

et que la seconde somme, comme $S(z)$ elle-même, converge absolument pour $z = z_0$ et est un $O(1)$. La table 479 contient quelques-unes des formules asymptotiques les plus utiles ; la moitié d'entre elles sont obtenues par troncation d'une série au moyen de cette règle.

Les séries de Dirichlet, qui sont des sommes de la forme $\sum_{k \geqslant 1} a_k/k^z$, peuvent être tronquées de manière similaire : si une série de Dirichlet converge absolument lorsque $z = z_0$, alors on peut la tronquer n'importe où pour obtenir l'approximation

$$\sum_{1 \leqslant k < m} a_k/k^z + O(m^{-z}),$$

valable pour tout z tel que $\Re z \geqslant \Re z_0$. Ce principe et illustré par la formule concernant les nombres de Bernoulli dans la table 479.

Souvenez-vous : $\Re$ est la "partie réelle"

Par contre, les formules asymptotiques concernant H_n, $n!$ et $\pi(n)$ dans la table 479 n'ont pas été obtenues par troncation de séries ; si on les prolongeait à l'infini, elles divergeraient pour toute valeur de n. C'est particulièrement facile à voir dans le cas de $\pi(n)$, parce que nous avons déjà vu dans l'exemple 5 de la section 7.3 que la série $\sum_{k \geqslant 0} k!/(\ln n)^k$ diverge pour tout n. Cela n'empêche pas ces approximations par des séries divergentes tronquées d'être bien utiles, même si on les tronque après le premier ou le second terme.

On dit qu'une approximation asymptotique admet une *erreur absolue* en $O\big(g(n)\big)$ si elle est de la forme $f(n) + O\big(g(n)\big)$, où $f(n)$ ne contient pas de O. L'approximation admet une *erreur relative* en $O\big(g(n)\big)$ si elle est de la forme $f(n)\big(1 + O\big(g(n)\big)\big)$, où $f(n)$ ne contient pas O. Par exemple, l'approximation de H_n dans la table 479 admet une erreur absolue en $O(n^{-6})$, tandis que l'approximation de $n!$ admet une erreur relative en $O(n^{-4})$. En fait, le membre droit de (9.29) n'est pas exactement sous la

Table 479 Approximations asymptotiques, pour $n \to \infty$ et $z \to 0$.

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\Big(\frac{1}{n^6}\Big). \tag{9.28}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big). \tag{9.29}$$

$$B_n = 2[n \text{ even}](-1)^{n/2-1}\frac{n!}{(2\pi)^n}\big(1 + 2^{-n} + 3^{-n} + O(4^{-n})\big). \tag{9.30}$$

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!\,n}{(\ln n)^3} + \frac{3!\,n}{(\ln n)^4} + O\Big(\frac{n}{(\log n)^5}\Big). \tag{9.31}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5). \tag{9.32}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + O(z^5). \tag{9.33}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + O(z^5). \tag{9.34}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \binom{\alpha}{2}z^2 + \binom{\alpha}{3}z^3 + \binom{\alpha}{4}z^4 + O(z^5). \tag{9.35}$$

forme requise $f(n)\big(1 + O(n^{-4})\big)$, mais on peut le réécrire en

$$\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3}\Big)\big(1 + O(n^{-4})\big).$$

(L'erreur relative est particulièrement adaptée au calcul d'inverses, car $1/(1 + O(\epsilon)) = 1 + O(\epsilon)$).

L'exercice 12 est consacré à un calcul similaire. L'erreur absolue de cette approximation de $n!$ est en $O(n^{n-3.5}e^{-n})$. De façon générale, l'erreur absolue d'une approximation est liée au nombre de chiffres corrects après la virgule si on ignore le terme en O, tandis que l'erreur relative correspond au nombre de "chiffres significatifs".

Les règles suivantes peuvent être démontrées par troncature de séries :

$$\ln\big(1 + O(f(n))\big) = O\big(f(n)\big), \qquad \text{si } f(n) \prec 1; \tag{9.36}$$

$$e^{O(f(n))} = 1 + O\big(f(n)\big), \qquad \text{si } f(n) = O(1). \tag{9.37}$$

(On suppose ici que $n \to \infty$; il y a aussi des formules similaires pour $\ln\big(1 + O(f(x))\big)$ et $e^{O(f(x))}$ lorsque $x \to 0$). Par exemple, soit $\ln\big(1 + g(n)\big)$ une fonction appartenant au membre gauche de (9.36). Alors il existe des constantes C, n_0 et c telles que

$$|g(n)| \leqslant C|f(n)| \leqslant c < 1, \qquad \text{pour tout } n \geqslant n_0.$$

Il s'ensuit que la somme infinie

$$\ln\bigl(1+g(n)\bigr) \;=\; g(n)\cdot\bigl(1-\tfrac{1}{2}g(n)+\tfrac{1}{3}g(n)^2-\cdots\bigr)$$

converge pour tout $n \geqslant n_0$ et que la série entre parenthèses est majorée par la constante $1+\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}c^2+\cdots$. Nous avons ainsi prouvé (9.36), et (9.37) se démontre de la même manière. On peut combiner les équations (9.36) et (9.37) pour obtenir la formule

$$\bigl(1+O(f(n))\bigr)^{O(g(n))} \;=\; 1+O\bigl(f(n)g(n)\bigr)\,, \qquad \begin{array}{c}\text{si } f(n)\prec 1 \text{ et}\\ f(n)g(n)=O(1).\end{array} \tag{9.38}$$

Problème 1 : encore un tour de roue de la fortune.

Tentons notre chance sur quelques problèmes de calcul asymptotique. Au chapitre 3, nous avons étudié un jeu de hasard, et nous avons déterminé le nombre de numéros gagnants ; c'était la formule (3.13) que voici :

$$W \;=\; \lfloor N/K\rfloor+\tfrac{1}{2}K^2+\tfrac{5}{2}K-3\,, \qquad K=\lfloor\sqrt[3]{N}\rfloor.$$

Nous avions promis, à ce moment-là de donner une version asymptotique de W au chapitre 9. Eh bien nous y sommes. Essayons donc d'estimer W lorsque $N\to\infty$.

Commençons par supprimer les crochets de partie entière en remplaçant K par $N^{1/3}+O(1)$. Nous pouvons même aller plus loin et écrire

$$K \;=\; N^{1/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)\,;$$

c'est ce qu'on appelle "retirer la plus grande part" (nous le ferons souvent). Maintenant, d'après (9.38) et (9.26),

$$\begin{aligned} K^2 \;&=\; N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)^2\\ &=\; N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr) \;=\; N^{2/3}+O(N^{1/3})\,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \lfloor N/K\rfloor \;&=\; N^{1-1/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)^{-1}+O(1)\\ &=\; N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)+O(1) \;=\; N^{2/3}+O(N^{1/3})\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le nombre de numéros gagnants est

$$\begin{aligned} W \;&=\; N^{2/3}+O(N^{1/3})+\tfrac{1}{2}\bigl(N^{2/3}+O(N^{1/3})\bigr)+O(N^{1/3})+O(1)\\ &=\; \tfrac{3}{2}N^{2/3}+O(N^{1/3})\,. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Remarquez comment l'un des termes en O a absorbé les autres ; c'est tout à fait typique, et c'est cette capacité qui rend la notation O si utile dans les formules.

Problème 2 : perturbons la formule de Stirling.

La formule de Stirling, qui donne une approximation de $n!$, est certainement la plus célèbre des formules asymptotiques. Nous la prouverons dans quelque temps ; pour l'instant, nous allons juste nous familiariser avec ses propriétés. On peut écrire une version de cette approximation sous la forme suivante :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+O(n^{-3})\right), \quad \text{lorsque } n\to\infty, \tag{9.40}$$

pour certaines constantes a et b. Comme c'est vrai pour tout n assez grand, cela doit être vrai aussi lorsqu'on remplace n par $n-1$:

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\\ &\quad\times\left(1+\frac{a}{n-1}+\frac{b}{(n-1)^2}+O\big((n-1)^{-3}\big)\right).\end{aligned} \tag{9.41}$$

Nous savons bien sûr que $(n-1)! = n!/n$. Par conséquent, on doit pouvoir simplifier le membre droit de cette formule pour obtenir celui de (9.40) divisé par n.

Essayons donc de simplifier (9.41). Nous pouvons commencer par retirer la plus grande part du premier facteur :

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi(n-1)} &= \sqrt{2\pi n}\,(1-n^{-1})^{1/2}\\ &= \sqrt{2\pi n}\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O(n^{-3})\right).\end{aligned}$$

Nous avons appliqué (9.35) pour trouver la seconde ligne.

De même, on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{n-1} &= \frac{a}{n}(1-n^{-1})^{-1} = \frac{a}{n}+\frac{a}{n^2}+O(n^{-3});\\ \frac{b}{(n-1)^2} &= \frac{b}{n^2}(1-n^{-1})^{-2} = \frac{b}{n^2}+O(n^{-3});\\ O\big((n-1)^{-3}\big) &= O\big(n^{-3}(1-n^{-1})^{-3}\big) = O(n^{-3}).\end{aligned}$$

La seule partie de (9.41) qui demande un peu de doigté, c'est le facteur $(n-1)^{n-1}$, qui est égal à

$$n^{n-1}(1-n^{-1})^{n-1} = n^{n-1}(1-n^{-1})^n\big(1+n^{-1}+n^{-2}+O(n^{-3})\big).$$

Remarquez que nous faisons en sorte que tous nos développements aient une erreur relative en $O(n^{-3})$; comme l'erreur relative d'un produit est la

somme des erreurs relatives des facteurs, tous les termes $O(n^{-3})$ se rassembleront pour n'en faire qu'un.

Pour développer $(1-n^{-1})^n$, nous allons d'abord calculer $\ln(1-n^{-1})$, puis en prendre l'exponentielle, $e^{n\ln(1-n^{-1})}$:

$$\begin{aligned}
(1-n^{-1})^n &= \exp\bigl(n\ln(1-n^{-1})\bigr)\\
&= \exp\bigl(n\bigl(-n^{-1}-\tfrac12 n^{-2}-\tfrac13 n^{-3}+O(n^{-4})\bigr)\bigr)\\
&= \exp\bigl(-1-\tfrac12 n^{-1}-\tfrac13 n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&= \exp(-1)\cdot\exp(-\tfrac12 n^{-1})\cdot\exp(-\tfrac13 n^{-2})\cdot\exp\bigl(O(n^{-3})\bigr)\\
&= \exp(-1)\cdot\bigl(1-\tfrac12 n^{-1}+\tfrac18 n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\qquad\cdot\bigl(1-\tfrac13 n^{-2}+O(n^{-4})\bigr)\cdot\bigl(1+O(n^{-3})\bigr)\\
&= e^{-1}\bigl(1-\tfrac12 n^{-1}-\tfrac{5}{24}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Nous avons préféré écrire $\exp z$ au lieu de e^z dans ce calcul pour que l'exposant compliqué soit sur la ligne principale de la formule au lieu d'être en exposant. Il nous a fallu développer $\ln(1-n^{-1})$ avec une erreur absolue en $O(n^{-4})$ pour obtenir finalement une erreur relative en $O(n^{-3})$, parce que le logarithme était multplié par n.

Le membre droit de (9.41) est maintenant réduit à $\sqrt{2\pi n}$ fois n^{n-1}/e^n fois un produit de plusieurs facteurs :

$$\begin{aligned}
&\bigl(1-\tfrac12 n^{-1}-\tfrac18 n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\cdot\bigl(1+n^{-1}+n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\cdot\bigl(1-\tfrac12 n^{-1}-\tfrac{5}{24}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\cdot\bigl(1+an^{-1}+(a+b)n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\,.
\end{aligned}$$

En multipliant tout cela et en rassemblant tous les termes asymptotiques dans un seul $O(n^{-3})$, on obtient

$$1+an^{-1}+(a+b-\tfrac{1}{12})n^{-2}+O(n^{-3})\,.$$

En fait, ce qu'il nous faudrait, c'est $1+an^{-1}+bn^{-2}+O(n^{-3})$, pour que cela concorde avec le membre droit de (9.40). Y a-t-il quelque chose qui ne va pas ? Eh bien non, tout va bien pourvu que $a+b-\frac{1}{12}=b$.

Ce que nous venons de faire ne prouve pas la formule de Stirling. Nous avons quand même démontré quelque chose : la formule (9.40) ne peut être vraie que si $a=\frac{1}{12}$. Si nous avions remplacé le $O(n^{-3})$ de (9.40) par $cn^{-3}+O(n^{-4})$ et effectué nos calculs avec une erreur relative en $O(n^{-4})$, nous aurions trouvé que b doit être égal à $\frac{1}{288}$, comme indiqué dans la table 479 (ce n'est pas le moyen le plus simple de trouver les valeurs de a et b, mais ça marche).

Problème 3 : le nième nombre premier.

L'équation (9.31) est une approximation asymptotique de $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Si on remplace n par $p = P_n$, le nième nombre premier, on obtient $\pi(p) = n$; par conséquent,

$$n = \frac{p}{\ln p} + O\Big(\frac{p}{(\log p)^2}\Big) \tag{9.42}$$

lorsque $n \to \infty$. Nous allons essayer de "résoudre" cette équation en p pour connaître la valeur approchée du nième nombre premier.

Commençons par simplifier le terme en O. Si on divise les deux membres par $p/\ln p$, on trouve que $n \ln p/p \to 1$; donc $p/\ln p = O(n)$ et

$$O\Big(\frac{p}{(\log p)^2}\Big) = O\Big(\frac{n}{\log p}\Big) = O\Big(\frac{n}{\log n}\Big).$$

(C'et parce que $p \geqslant n$ que $(\log p)^{-1} \leqslant (\log n)^{-1}$).

Continuons en intervertissant les deux membres de (9.42), sauf le terme en O qui reste à sa place. C'est tout à fait légal en vertu de la règle

$$a_n = b_n + O\big(f(n)\big) \iff b_n = a_n + O\big(f(n)\big), \tag{9.43}$$

que l'on peut prouver en multipiant les deux membres de l'une des deux équations par -1, puis en leur ajoutant $a_n + b_n$. Par conséquent,

$$\frac{p}{\ln p} = n + O\Big(\frac{n}{\log n}\Big) = n\big(1 + O(1/\log n)\big),$$

et on obtient

$$p = n \ln p\big(1 + O(1/\log n)\big), \tag{9.44}$$

une "récurrence approchée" de $p = P_n$ en fonction de lui-même. Nous allons nous efforcer de la transformer en une "forme close approchée". Pour cela, nous allons "déplier asymptotiquement la récurrence".

En prenant les logarithmes des deux membres, on trouve que

$$\ln p = \ln n + \ln\ln p + O(1/\log n). \tag{9.45}$$

Nous pourrions remplacer le $\ln p$ de (9.44) par cette valeur ; mais auparavant, nous devons nous débarrasser du p du membre droit. Or, nous ne pouvons pas le faire comme nous le faisons d'habitude pour une récurrence car aucune condition initiale n'est spécifiée dans (9.44).

Nous allons nous en sortir en commençant par prouver un résultat plus faible, à savoir que $p = O(n^2)$. Il suffit pour cela d'élever (9.44) au carré et de diviser par pn^2,

$$\frac{p}{n^2} = \frac{(\ln p)^2}{p}\big(1 + O(1/\log n)\big),$$

car le membre droit tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Bien, nous savons que $p = O(n^2)$; alors $\log p = O(\log n)$ et $\log\log p = O(\log\log n)$. Nous pouvons donc déduire de (9.45) que

$$\ln p = \ln n + O(\log\log n).$$

De ce fait, $\ln\ln p = \ln\ln n + O(\log\log n/\log n)$, et (9.45) implique que

$$\ln p = \ln n + \ln\ln n + O(\log\log n/\log n).$$

Nous pouvons maintenant injecter ce résultat dans le membre droit de (9.44) pour obtenir

$$p = n\ln n + n\ln\ln n + O(n).$$

C'est une valeur approchée du nième nombre premier.

On peut la raffiner en utilisant une meilleure approximation de $\pi(n)$ que celle de (9.42). D'après (9.31),

$$n = \frac{p}{\ln p} + \frac{p}{(\ln p)^2} + O\Big(\frac{p}{(\log p)^3}\Big); \tag{9.46}$$

en procédant comme ci-dessus, on obtient la récurrence

Retournez chercher le papier brouillon, les gars.

$$p = n\ln p\,\big(1 + (\ln p)^{-1}\big)^{-1}\big(1 + O(1/\log n)^2\big), \tag{9.47}$$

qui admet une erreur relative en $O(1/\log n)^2$ au lieu de $O(1/\log n)$. En prenant le logarithme et en travaillant avec la précision adéquate (juste ce qu'il faut), on trouve

$$\begin{aligned}
\ln p &= \ln n + \ln\ln p + O(1/\log n)\\
&= \ln n\Big(1 + \frac{\ln\ln p}{\ln n} + O(1/\log n)^2\Big);\\
\ln\ln p &= \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\Big(\frac{\log\log n}{\log n}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Pour finir, injectons ces résultats dans (9.47). Voici la réponse que nous cherchions :

$$P_n = n\ln n + n\ln\ln n - n + n\frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\Big(\frac{n}{\log n}\Big). \tag{9.48}$$

Par exemple, pour $n = 10^6$, cette approximation donne $15631363,6 + O(n/\log n)$, et le millionième nombre premier est 15485863. L'exercice 21 montre qu'on peut obtenir une approximation encore meilleure de P_n en partant d'une meilleure approximation de $\pi(n)$ que celle de (9.46).

Problème 4 : une somme tirée d'un vieil examen.

La première année où les Mathématiques Concrètes ont été enseignées à l'Université de Stanford, en 1970–1971, une partie de l'examen consistait à trouver la valeur asymptotique de la somme

$$S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}, \tag{9.49}$$

avec une erreur absolue en $O(n^{-7})$. Supposons qu'on vienne juste de nous poser ce problème pour un examen (à la maison). Quelle est notre première réaction ?

Non, nous ne paniquons pas. Notre première réaction est de PENSER GRAND. Si on pose par exemple $n = 10^{100}$, on voit que la somme est composée de n termes, chacun d'entre eux étant un peu plus petit que $1/n^2$; par conséquent, le résultat est légèrement inférieur à $1/n$. Il n'est pas inutile de faire ainsi une première approximation "à vue de nez" lorsqu'on attaque un problème de calcul asymptotique.

Essayons d'améliorer cette première approximation en retirant la plus grande part de chaque terme. Ainsi,

$$\frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2(1+k/n^2)} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^4} - \frac{k^3}{n^6} + O\left(\frac{k^4}{n^8}\right)\right),$$

et, en sommant toutes ces approximations, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2+1} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1^2}{n^6} - \frac{1^3}{n^8} + O\left(\frac{1^4}{n^{10}}\right)\\
\frac{1}{n^2+2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{2^2}{n^6} - \frac{2^3}{n^8} + O\left(\frac{2^4}{n^{10}}\right)\\
&\vdots\\
\frac{1}{n^2+n} &= \frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^4} + \frac{n^2}{n^6} - \frac{n^3}{n^8} + O\left(\frac{n^4}{n^{10}}\right)\\
\hline
S_n &= \frac{n}{n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^4} + \cdots .
\end{aligned}$$

Si on se base sur les sommes des deux premières colonnes, il semblerait qu'on obtienne $S_n = n^{-1} - \frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})$. Cependant, le calcul devient de plus en plus difficile à chaque colonne.

Si nous persévérons dans cette approche, nous finirons par atteindre notre but. Cependant, nous n'allons pas continuer dans ce sens, et cela pour deux raisons. D'abord la dernière colonne nous donnerait des termes en $O(n^{-6})$ lorsque $n/2 \leqslant k \leqslant n$, donc nous aurions finalement une erreur en $O(n^{-5})$; ce serait trop, et il nous faudrait ajouter encore une colonne à notre développement. Aucun enseignant ne peut être assez sadique pour nous imposer cela. Il doit donc y avoir une meilleure méthode. La seconde raison est qu'en effet il y a une meilleure méthode, et de plus elle nous saute aux yeux. *On parie ?*

En effet, nous connaissons une forme close de S_n: c'est $H_{n^2+n} - H_{n^2}$. Nous connaissons aussi une bonne approximation des nombres harmoniques. Nous n'avons qu'à l'appliquer deux fois :

$$\begin{aligned} H_{n^2+n} &= \ln(n^2+n) + \gamma + \frac{1}{2(n^2+n)} - \frac{1}{12(n^2+n)^2} + O\Big(\frac{1}{n^8}\Big) ; \\ H_{n^2} &= \ln n^2 + \gamma + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + O\Big(\frac{1}{n^8}\Big) . \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons retirer la plus grande part des termes et simplifier, exactement comme ce que nous avons fait pour la formule de Stirling. Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(n^2+n) &= \ln n^2 + \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \ln n^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots ; \\ \frac{1}{n^2+n} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \cdots ; \\ \frac{1}{(n^2+n)^2} &= \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^6} - \cdots . \end{aligned}$$

Beaucoup de choses se simplifient et on trouve

$$\begin{aligned} S_n = n^{-1} - \tfrac{1}{2}n^{-2} + \tfrac{1}{3}n^{-3} - \tfrac{1}{4}n^{-4} + \tfrac{1}{5}n^{-5} - \tfrac{1}{6}n^{-6} \\ - \tfrac{1}{2}n^{-3} + \tfrac{1}{2}n^{-4} - \tfrac{1}{2}n^{-5} + \tfrac{1}{2}n^{-6} \\ + \tfrac{1}{6}n^{-5} - \tfrac{1}{4}n^{-6} \end{aligned}$$

plus des termes en $O(n^{-7})$. Un petit peu d'arithmétique, et c'est terminé :

$$S_n = n^{-1} - \tfrac{1}{2}n^{-2} - \tfrac{1}{6}n^{-3} + \tfrac{1}{4}n^{-4} - \tfrac{2}{15}n^{-5} + \tfrac{1}{12}n^{-6} + O(n^{-7}). \quad (9.50)$$

Il serait intéressant de pouvoir vérifier numériquement ce résultat, comme nous le faisions pour des résultats exacts dans les chapitres précédents. Les formules asymptotiques sont plus difficiles à vérifier que les formules exactes car le terme en O peut cacher des constantes très grandes ; dans ce cas, on ne peut rien conclure d'une vérification numérique. Cependant, en pratique, nous n'avons aucune raison de penser que quelqu'un

essaie de nous piéger, et nous pouvons donc supposer a priori que ces constantes inconnues sont raisonnablement petites. Avec une calculatrice, on trouve que $S_4 = \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} = 0,2170107$, et notre estimation asymptotique pour $n = 4$ donne

$$\tfrac{1}{4}\big(1 + \tfrac{1}{4}\big(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\big(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\big(-\tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{12}\big)\big)\big)\big)\big) \;=\; 0,2170125\,.$$

Si nous avions fait un erreur de, disons $\frac{1}{12}$ dans le terme en n^{-6}, nous aurions trouvé une différence de $\frac{1}{12}\frac{1}{4096}$ dans la cinquième décimale. Notre estimation est donc probablement correcte.

Problème 5 : une somme infinie.

Intéressons-nous maintenant à une question posée par Solomon Golomb [152] : quelle est la valeur asymptotique de

$$S_n \;=\; \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{kN_n(k)^2}\,, \tag{9.51}$$

où $N_n(k)$ désigne le nombre de chiffres nécessaires pour écrire k en base n ?

Essayons d'abord, comme tout à l'heure, d'approximer "à vue de nez". Le nombre $N_n(k)$ de chiffres vaut à peu près $\log_n k = \log k/\log n$; chaque terme de la somme est donc à peu près égal à $(\log n)^2/k(\log k)^2$. En sommant sur k, on trouve $\approx (\log n)^2 \sum_{k\geqslant 2} 1/k(\log k)^2$, et cette somme converge vers une valeur constante car on peut la comparer à l'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} \;=\; -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^\infty \;=\; \frac{1}{\ln 2}\,.$$

Par conséquent, nous pouvons nous attendre à ce que S_n vaille à peu près $C(\log n)^2$, pour une certaine constante C.

Bien que ce genre de raisonnement soit bien utile pour nous donner une idée de la solution, il nous faut une meilleure estimation pour résoudre le problème. On peut voir ce que cela donne si on exprime $N_n(k)$ exactement :

$$N_n(k) \;=\; \lfloor \log_n k \rfloor + 1\,. \tag{9.52}$$

Ainsi, par exemple, k s'écrit avec trois chiffres en base n si $n^2 \leqslant k < n^3$, et cela arrive précisément lorsque $\lfloor \log_n k \rfloor = 2$. Il s'ensuit que $N_n(k) > \log_n k$, donc $S_n = \sum_{k\geqslant 1} 1/kN_n(k)^2 < 1 + (\log n)^2 \sum_{k\geqslant 2} 1/k(\log k)^2$.

On peut aussi essayer de procéder comme au problème 1, en écrivant $N_n(k) = \log_n k + O(1)$ et en injectant cette expression dans la formule donnée pour S_n. Le terme représenté par $O(1)$ se comporte bien, car il est toujours entre 0 et 1, et il vaut à peu près $\frac{1}{2}$ en moyenne. Cependant, on n'obtient toujours pas de bonne approximation pour S_n ; on a zéro chiffre significatif (donc une erreur relative très importante) lorsque k est petit,

justement pour les termes qui contribuent le plus à la somme. Il nous faut une autre idée.

Ce qu'il faut faire, c'est, comme pour le problème 4, d'abord transformer la somme en quelque chose de plus sympathique, avant d'essayer de l'approximer. Pour ce faire, introduisons une nouvelle variable de sommation, $m = N_n(k)$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k,m\geqslant 1} \frac{[m = N_n(k)]}{km^2} \\ &= \sum_{k,m\geqslant 1} \frac{[n^{m-1} \leqslant k < n^m]}{km^2} \\ &= \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^2}\left(H_{n^m-1} - H_{n^{m-1}-1}\right). \end{aligned}$$

Bien que cela puisse sembler pire que la somme de départ, c'est en réalité un progrès parce que nous savons très bien approximer les nombres harmoniques.

Inutile cependant de nous précipiter tout de suite sur le calcul asymptotique. Retenons-nous et essayons de simplifier encore un peu notre somme. En sommant par parties, nous pouvons regrouper les termes de chaque valeur de H_{n^m-1} à approximer :

$$S_n = \sum_{k\geqslant 1} H_{n^k-1}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Par exemple, H_{n^2-1} est multiplié par $1/2^2$ puis par $-1/3^2$ (nous avons utilisé le fait que $H_{n^0-1} = H_0 = 0$).

Nous sommes maintenant prêts à développer les nombres harmoniques. Nous avons compris, depuis que nous avons travaillé sur $(n-1)!$, qu'il sera certainement plus facile d'estimer H_{n^k} que H_{n^k-1}. C'est pourquoi nous écrivons

$$\begin{aligned} H_{n^k-1} = H_{n^k} - \frac{1}{n^k} &= \ln n^k + \gamma + \frac{1}{2n^k} + O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right) - \frac{1}{n^k} \\ &= k\ln n + \gamma - \frac{1}{2n^k} + O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, notre somme se trouve réduite à

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k\geqslant 1}\left(k\ln n + \gamma - \frac{1}{2n^k} + O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right)\right)\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= (\ln n)\Sigma_1 + \gamma\Sigma_2 - \tfrac{1}{2}\Sigma_3(n) + O\big(\Sigma_3(n^2)\big). \end{aligned} \tag{9.53}$$

Il ne reste que quatre sommes, Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3(n)$ et $\Sigma_3(n^2)$, qui ne présentent pas de difficulté.

Commençons par les Σ_3, car $\Sigma_3(n^2)$ constitue le terme en O ; nous allons voir ainsi l'erreur que nous obtiendrons (il n'y a pas de raison d'effectuer les autres calculs avec une grande précision si en définitive ils doivent être absorbés par un grand O). Cette somme est simplement la série

$$\Sigma_3(x) = \sum_{k\geqslant 1}\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\Big)x^{-k},$$

qui converge lorsque $x \geqslant 1$; nous pouvons donc la tronquer en n'importe quel terme. Si nous la tronquons au terme tel que $k = 1$, nous obtenons $\Sigma_3(n^2) = O(n^{-2})$; donc (9.53) aura une erreur absolue en $O(n^{-2})$ (pour la diminuer, nous pourrions utiliser une meilleure approximation de H_{n^k}, mais $O(n^{-2})$ nous suffira). Si nous tronquons $\Sigma_3(n)$ au terme tel que $k = 2$, nous obtenons

$$\Sigma_3(n) = \tfrac{3}{4}n^{-1} + O(n^{-2}).$$

C'est exactement la précision qu'il nous faut.

Tant que nous y sommes, occupons-nous tout de suite de Σ_2, cela ne nous prendra pas longtemps :

$$\Sigma_2 = \sum_{k\geqslant 1}\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\Big).$$

C'est la série télescopique $(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{16})+\cdots = 1$.

Pour finir, voici Σ_1, le coefficient de $\ln n$ dans (9.53) :

$$\Sigma_1 = \sum_{k\geqslant 1} k\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\Big).$$

Cela donne $(1-\frac{1}{4})+(\frac{2}{4}-\frac{2}{9})+(\frac{3}{9}-\frac{3}{16})+\cdots = \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots = H_\infty^{(2)} = \pi^2/6$. Remarquons que si nous n'avions pas fait une sommation par parties tout à l'heure, nous aurions pu voir directement que $S_n \sim \sum_{k\geqslant 1}(\ln n)/k^2$, car $H_{n^k-1} - H_{n^{k-1}-1} \sim \ln n$. Ainsi, la sommation par parties ne nous a été d'aucune utilité pour calculer le terme principal de (9.53) ; par contre, elle a facilité le reste du travail.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à rassembler tout cela pour trouver la réponse au problème de Golomb :

$$S_n = \frac{\pi^2}{6}\ln n + \gamma - \frac{3}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{9.54}$$

Notez que cette expression croît plus lentement que notre première estimation "à vue de nez", qui était de $C(\log n)^2$. Les sommes discrètes n'obéissent pas forcément à des approximations "continues".

Problème 6 : grand Phi.

Vers la fin du chapitre 4, nous avons remarqué que le nombre de fractions de la suite de Farey $\mathcal{F}_n$ est égal à à $1+\Phi(n)$, où $\Phi(n) = \varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)$, et nous avons établi, en (4.62), que

$$\Phi(n) = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}{}' \mu(k)\lfloor n/k\rfloor\lfloor 1+n/k\rfloor . \tag{9.55}$$

Nous allons tenter d'estimer $\Phi(n)$ lorsque n est grand (ce sont des sommes de ce genre qui ont incité Bachmann à inventer la notation O).

Si on n'oublie pas de penser GRAND, on peut voir tout de suite que $\Phi(n)$ sera très probablement proportionnel à n^2. En effet, si le dernier facteur était $\lfloor n/k\rfloor$ au lieu de $\lfloor 1+n/k\rfloor$, on aurait $|\Phi(n)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\lfloor n/k\rfloor^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}(n/k)^2 = \frac{\pi^2}{12}n^2$, car la fonction de Möbius $\mu(k)$ vaut soit -1, soit 0, soit $+1$. Le "$1+$" de ce dernier facteur a pour effet d'ajouter $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)\lfloor n/k\rfloor$ à la somme ; comme c'est nul pour $k > n$, cela ne peut pas être plus grand que $nH_n = O(n\log n)$ en valeur absolue.

A la lumière de cette analyse préliminaire, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\Phi(n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Big(\Big(\frac{n}{k}\Big)+O(1)\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Big(\Big(\frac{n}{k}\Big)^2+O\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Big(\frac{n}{k}\Big)^2+\sum_{k=1}^{n}O\Big(\frac{n}{k}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Big(\frac{n}{k}\Big)^2 + O(n\log n) .
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi supprimé les parties entières. Il nous reste à évaluer la somme $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)n^2/k^2$ avec une précision en $O(n\log n)$. Autrement dit, nous devons calculer $\sum_{k=1}^{n}\mu(k)1/k^2$ avec une précision en $O(n^{-1}\log n)$. Facile : il suffit de calculer cette somme en autorisant k à aller jusqu'à ∞, puisque ce qu'on y ajoute ainsi est

$$\begin{aligned}
\sum_{k>n}\frac{\mu(k)}{k^2} = O\Big(\sum_{k>n}\frac{1}{k^2}\Big) &= O\Big(\sum_{k>n}\frac{1}{k(k-1)}\Big) \\
&= O\Big(\sum_{k>n}\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Big)\Big) = O\Big(\frac{1}{n}\Big) .
\end{aligned}$$

Nous avons démontré en (7.89) que $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)/k^z = 1/\zeta(z)$. Par conséquent, $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)/k^2 = 1/\bigl(\sum_{k\geqslant 1}1/k^2\bigr) = 6/\pi^2$, et voici donc notre réponse :

(Saltykov a montré en 1960 [316] que l'erreur est au plus en $O(n(\log n)^{2/3}\times(\log\log n)^{1+\epsilon})$; on sait aussi, grâce à Montgomery [275], qu'elle est plus grande que $o(n(\log\log n)^{1/2})$).

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O(n\log n)\,. \tag{9.56}$$

9.4 DEUX TRUCS ASYMPTOTIQUES

Maintenant que nous commençons à bien savoir manipuler les O, prenons un peu de recul pour observer ce que nous venons de faire. Cela va nous fournir encore des armes à ajouter à notre arsenal asymptotique. Elles nous seront bien utiles pour attaquer des problèmes plus coriaces.

Truc numéro 1 : l'amorçage.

Lorsque nous avons approximé le nième nombre premier P_n, dans le problème 3 de la section 9.3, nous avons résolu une récurrence asymptotique de la forme

$$P_n = n\ln P_n\bigl(1+O(1/\log n)\bigr)\,.$$

Pour démontrer que $P_n = n\ln n + O(n)$, nous avons commencé par prouver, en utilisant la récurrence, que $P_n = O(n^2)$. Nous avons ainsi appliqué une méthode générale, appelée *amorçage*, qui consiste à résoudre asymptotiquement une récurrence en partant d'une estimation grossière et en l'injectant dans la récurrence (pour "amorcer la pompe" en quelque sorte). De cette façon, on peut trouver des estimations de plus en plus précises.

Voici un autre problème qui illustre bien cette méthode : quelle est la valeur asymptotique du coefficient $g_n = [z^n]\,G(z)$ dans la fonction génératrice

$$G(z) = \exp\Bigl(\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^k}{k^2}\Bigr)\,, \tag{9.57}$$

lorsque $n\to\infty$? En dérivant cette équation par rapport à z, on trouve

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^{n-1} = \Bigl(\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{k-1}}{k}\Bigr)G(z)\,;$$

puis, en mettant en équations les coefficients de z^{n-1} des deux membres, on obtient la récurrence

$$n g_n = \sum_{0\leqslant k<n}\frac{g_k}{n-k}\,. \tag{9.58}$$